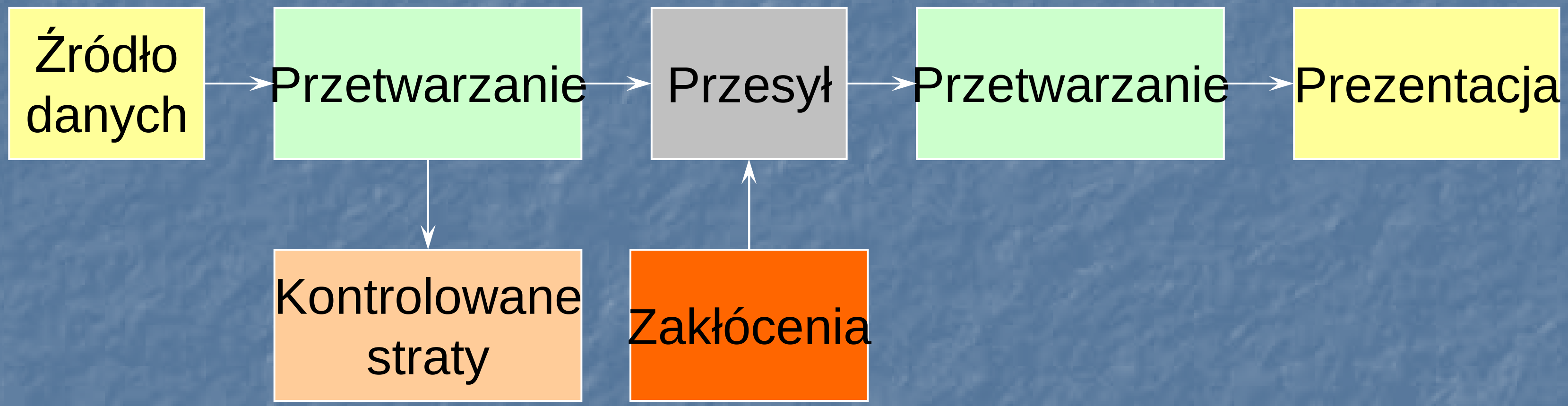
Cyfrowe przetwarzanie i kompresja danych

dr inż. Wojciech Zając

Wykład 5.

Dyskretna transformata falkowa

Schemat systemu transmisji danych wizyjnych



Obliczanie jednowymiarowej transformaty DCT

Przekształcenie proste

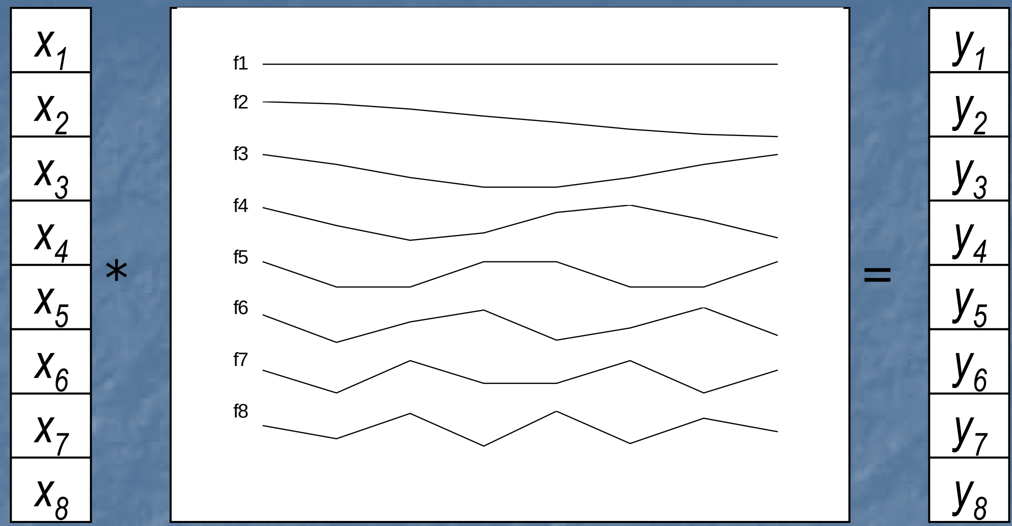
$$X \times DCT = Y$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \quad & & \\ & ? & \\ & & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}$$

Obliczanie jednowymiarowej transformaty DCT

Przekształcenie proste

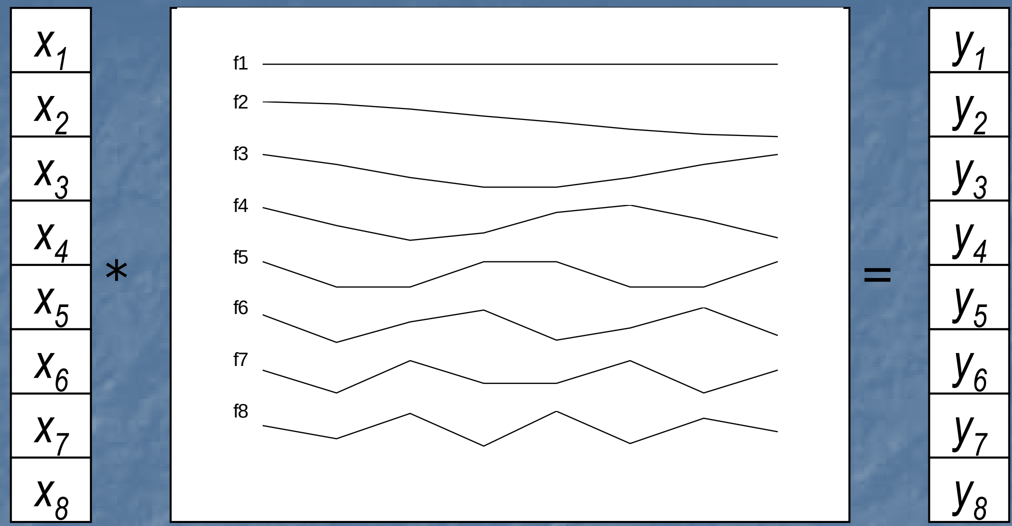
$$X \times DCT = Y$$



Obliczanie jednowymiarowej transformaty DCT

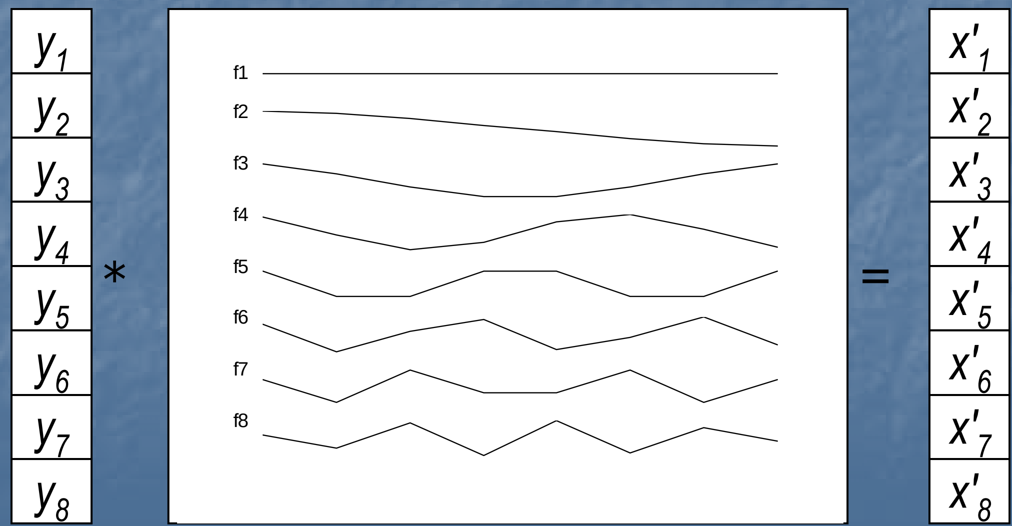
Przekształcenie proste

$$X \times DCT = Y$$

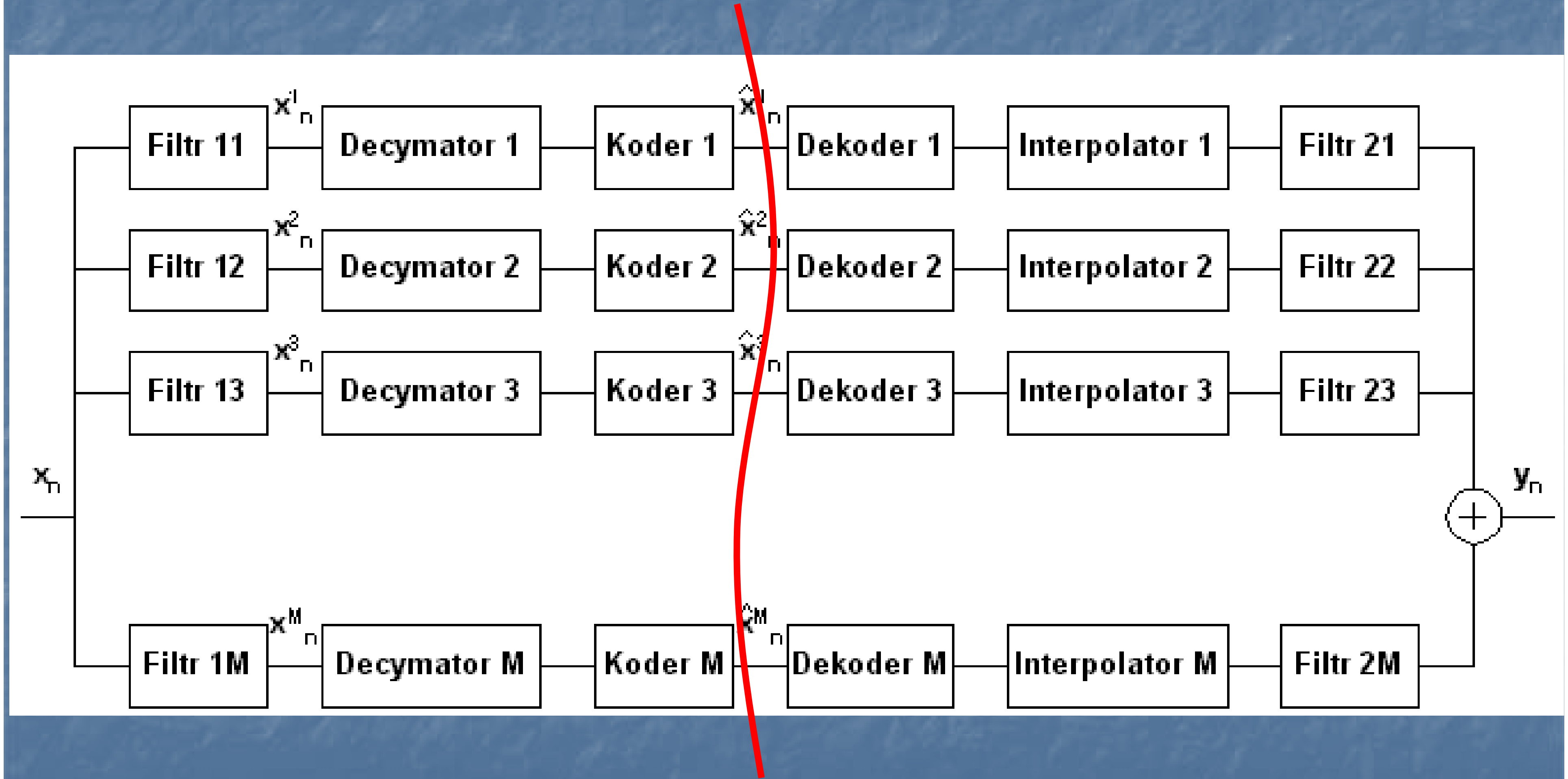


Przekształcenie odwrotne

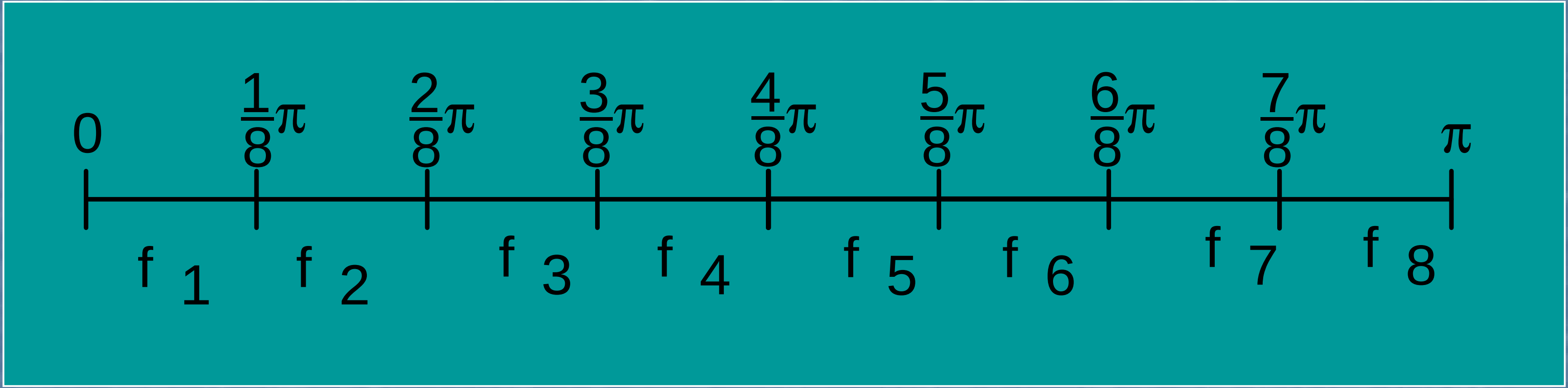
$$Y \times DCT = X$$



DCT jako analiza sub-pasmowa

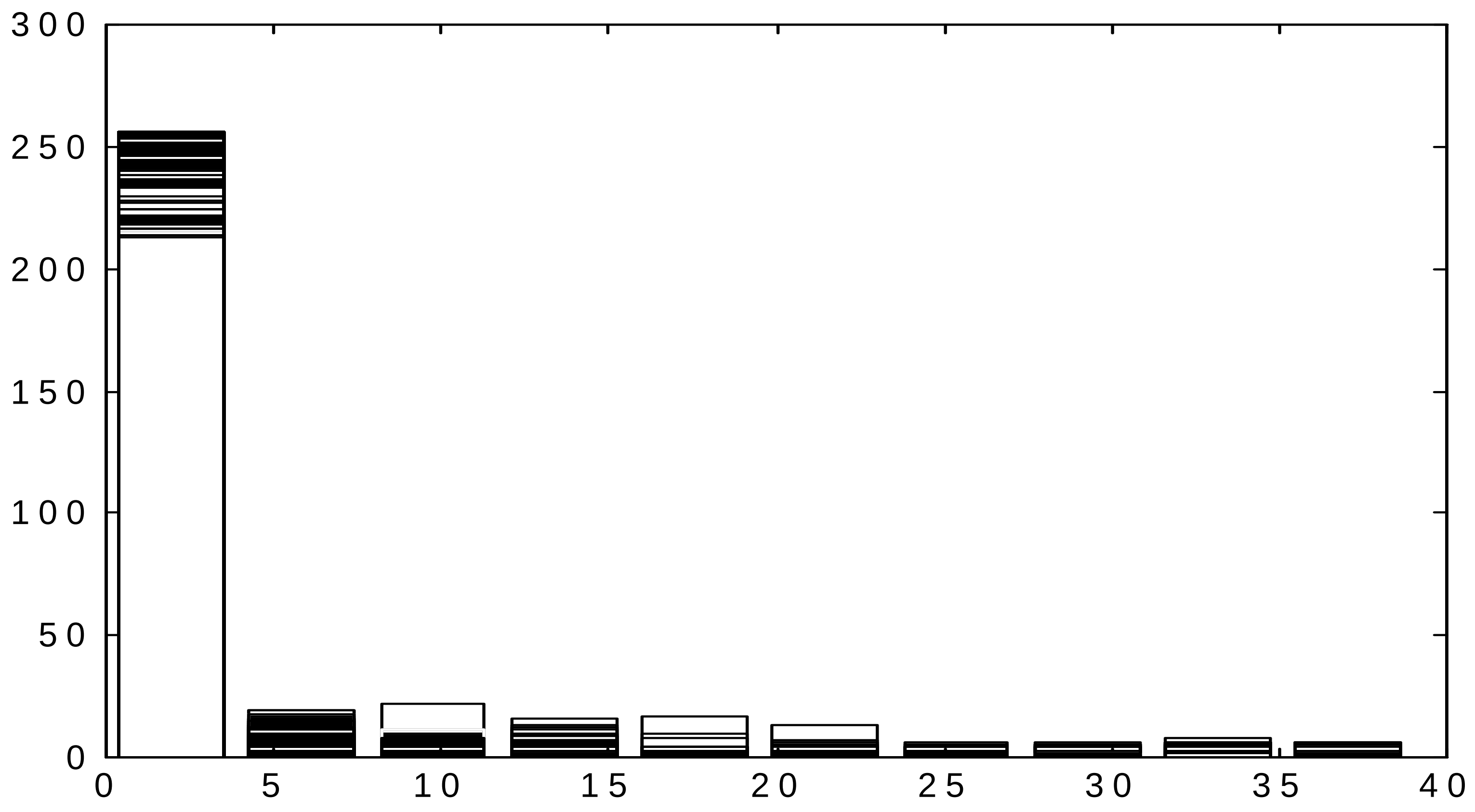


Podział widma sygnału w analizie subpasmowej DCT



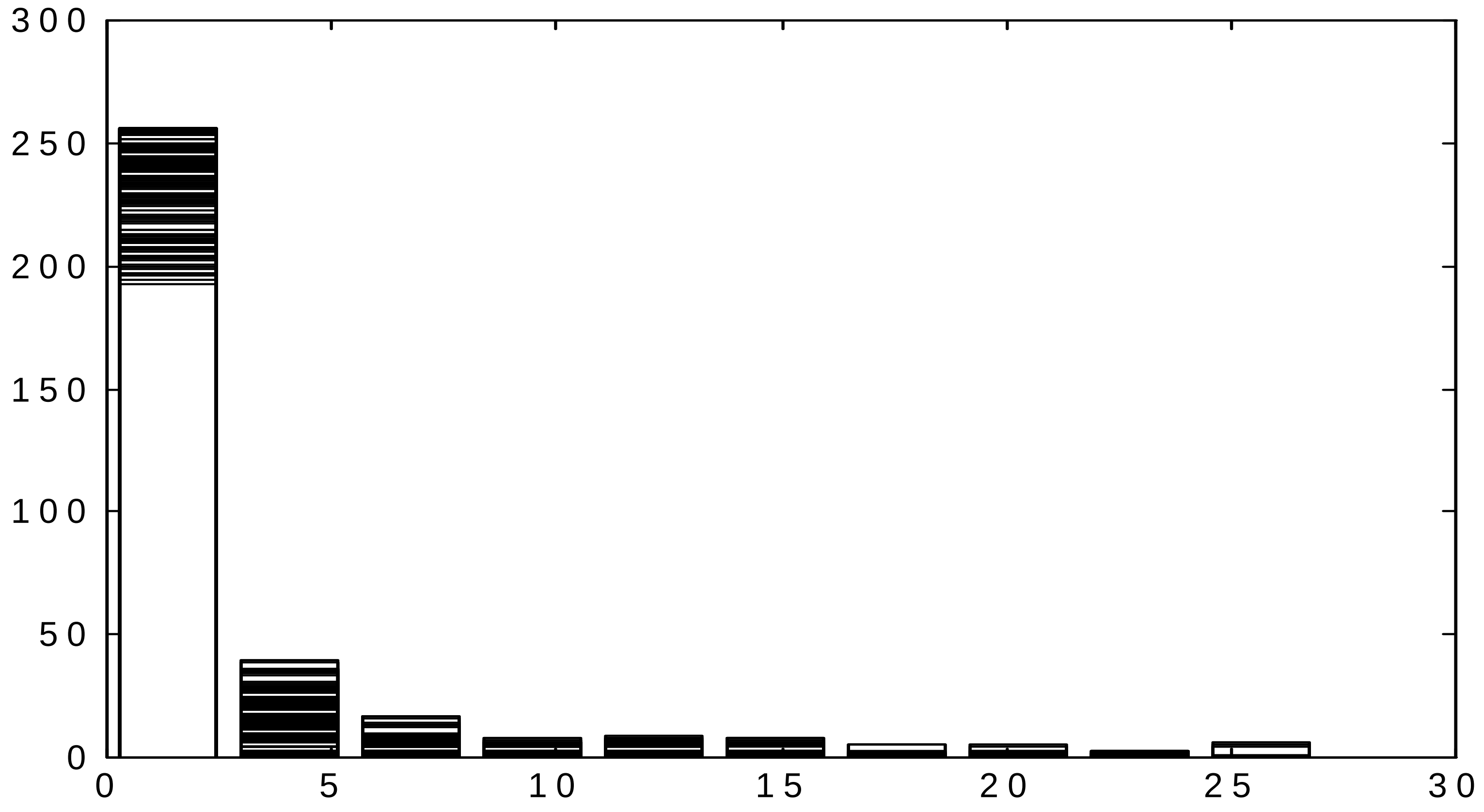
Rozkład energii w obrazie

- Histogram wartości współczynników DCT obraz LENA256

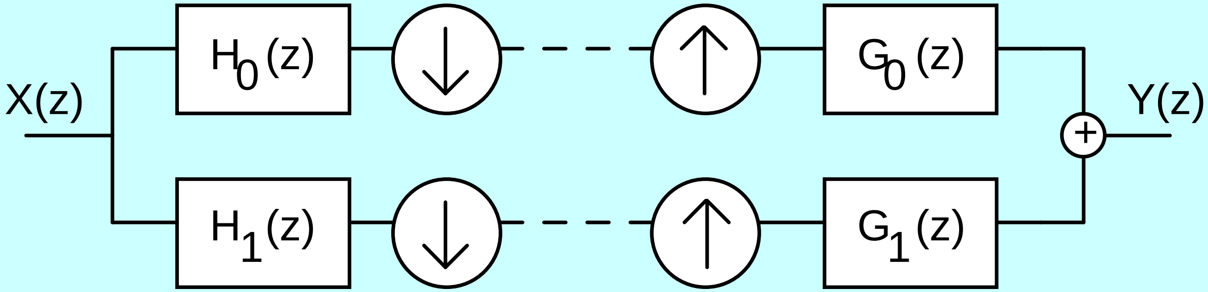


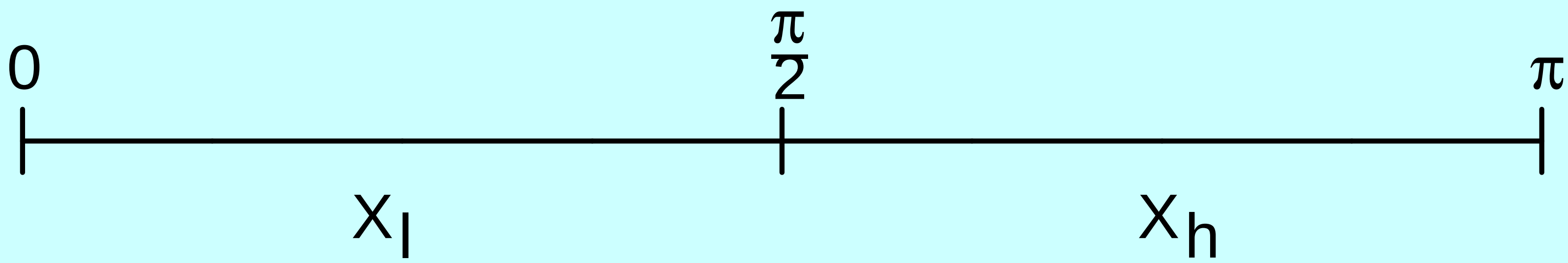
Rozkład energii w obrazie

- Histogram wartości współczynników DCT obraz BABOON

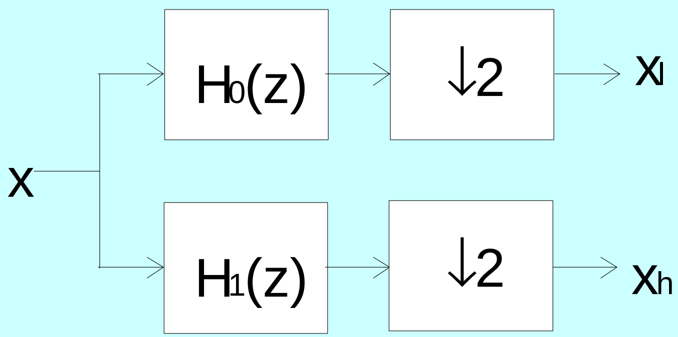


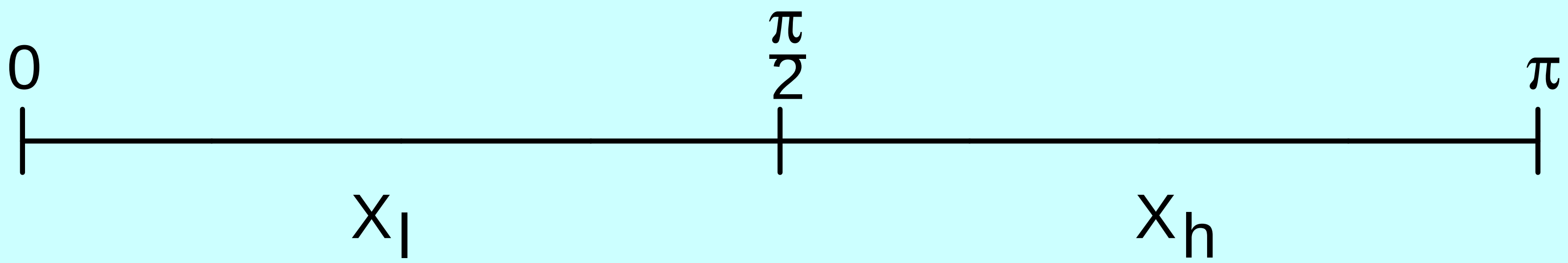
Szczególna postać analizy subpasmowej



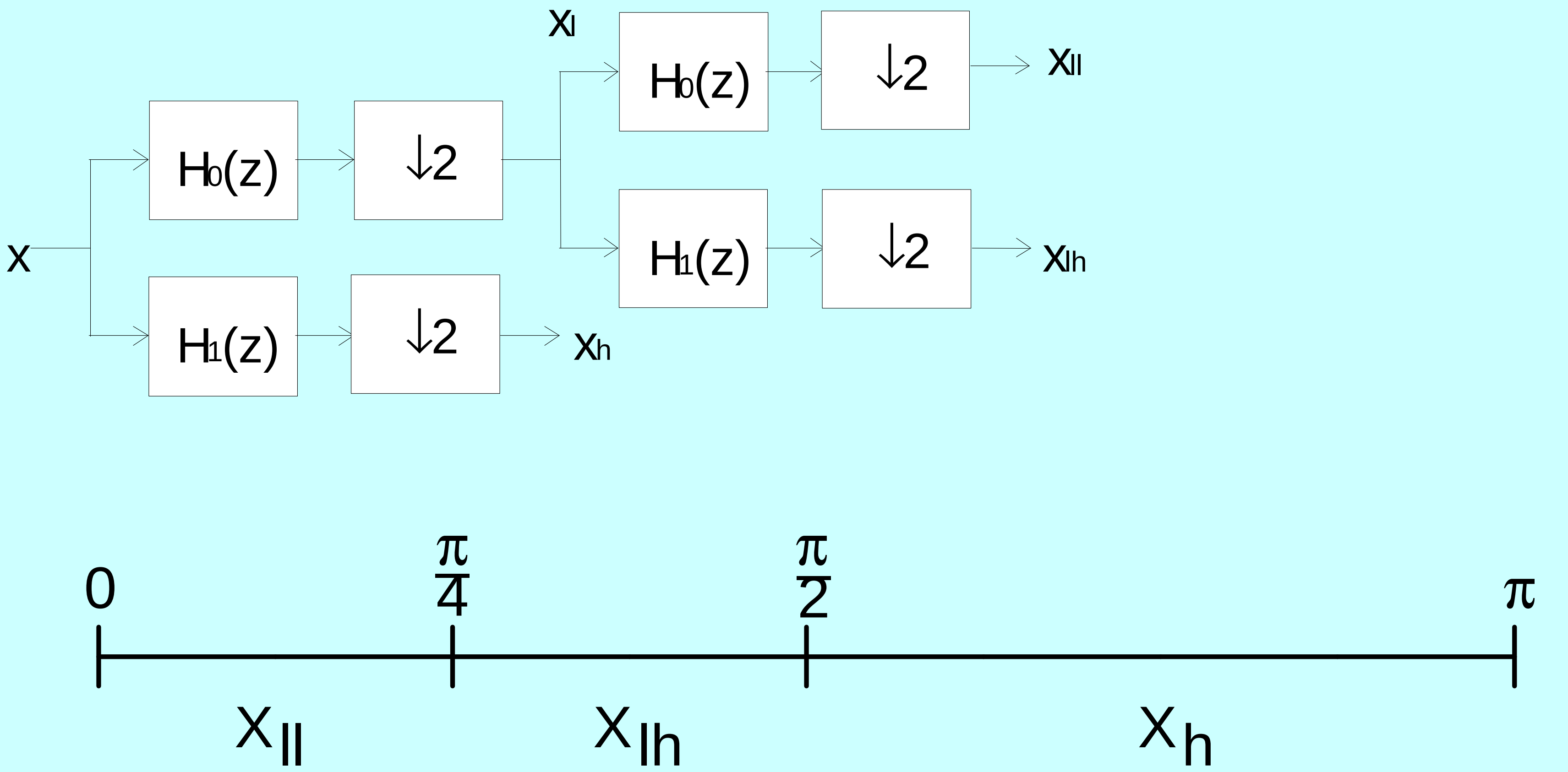


Podział widma sygnału w analizie falkowej

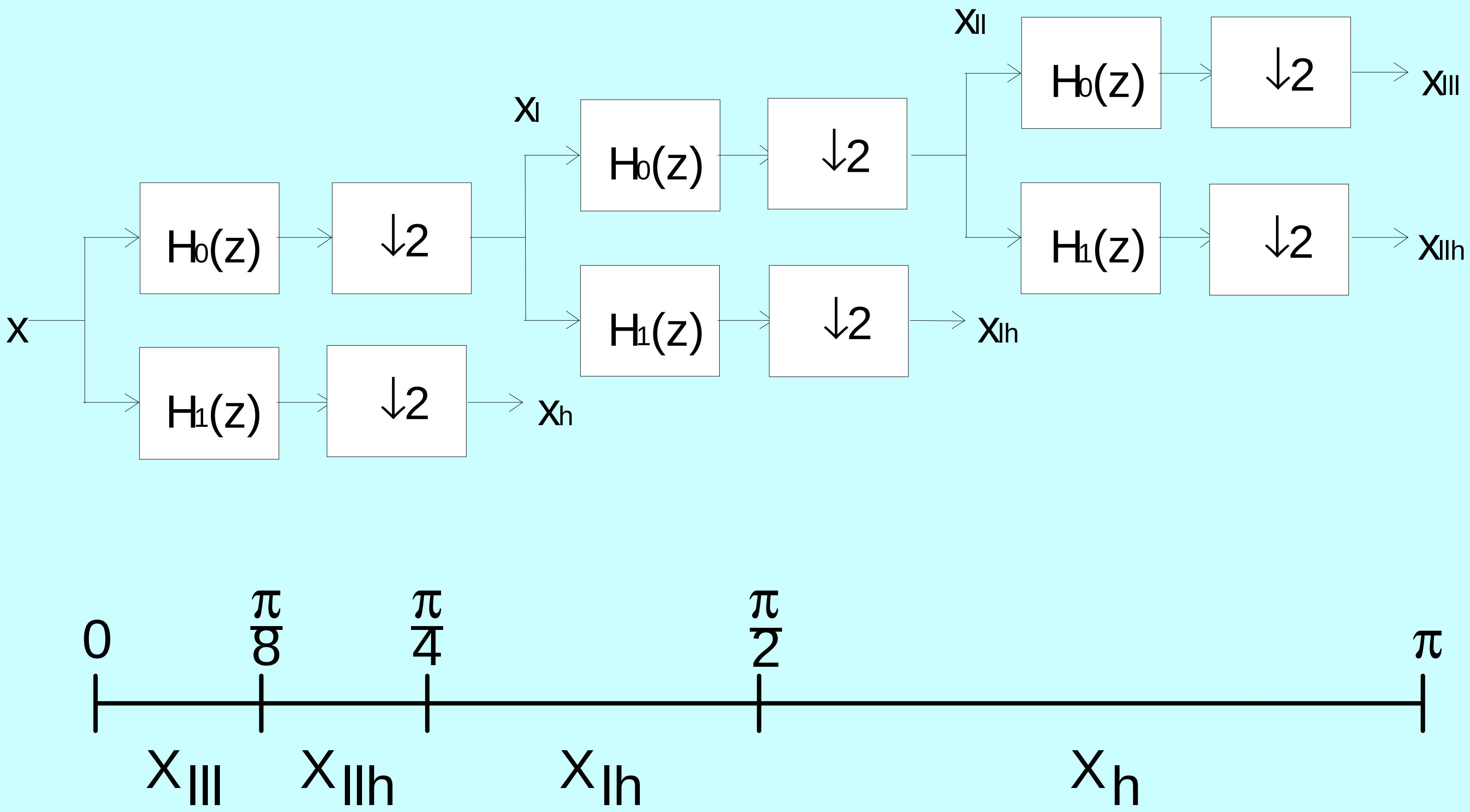




Podział widma sygnału w analizie falkowej



Podział widma sygnału w analizie falkowej



Analiza falkowa

W przeciwieństwie do analizy fourierowskiej i kosinusowej, analiza falkowa nie wyraża badanych funkcji poprzez wielomiany, ale poprzez pewne specjalne funkcje - falki, które są tworzone ze stałej funkcji zwanej falką macierzystą, poddanej wielokrotnym translacjom.

Uzyskane w ten sposób falki mają szereg interesujących skalowalnych właściwości. Można je odnosić zarówno do czasu jak i do częstotliwości, dopuszczając bliższe związki pomiędzy badaną funkcją (funkcją reprezentowaną), a jej współczynnikami. W ten sposób uzyskano większą numeryczna stabilność w procesie odtwarzania funkcji.

Pokazano, że każde zadanie posługujące się szybką transformatą Fouriera może zostać sformułowane za pomocą falek, dając przy tym więcej informacji przestrzennej (o miejscu położenia) jak i częstotliwościowej. W ten sposób zamiast tworzyć spektrum natężenie-częstotliwość można otrzymać spektrum falkowe (wavelet spectrum).

TRANSFORMATA FALKOWA

Cechą charakterystyczną funkcji bazowych transformaty falkowej jest to, że ich wartość średnia jest równa zero i mają postać szybko gasnących oscylacji. Ciągła transformata falkowa sygnału ciągłego *x*(*t*), z zastosowaniem falki bazowej *g*(*t*) jest opisana równaniem:

$$Wf\left(a,b\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t\right)g*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

gdzie *a* jest współczynnikiem skali (wpływa na czas trwania) falki, *b* współczynnikiem przesunięcia (zmienia położenie na osi czasu). Wartość współczynników *a* i *b* interpretuje się jako miarę podobieństwa do danego fragmentu analizowanego sygnału. Wynikiem ciągłego przekształcenia falkowego są współczynniki *Wf*(*a,b*), które odwzorowują sygnał oryginalny *x*(*t*) za pomocą falki bazowej *g*(*t*) w przestrzeni czas-częstotliwość.

Przekształcenie falkowe

Przekształcenie falkowe opiera się na szablonie, który wykorzystuje pewną funkcję podstawową (falkę podstawową). Transformatę falkową oblicza się na podstawie wzoru , poprzez wyznaczanie iloczynu skalarnego z przeskalowanymi i przesuniętymi wersjami falki podstawowej.

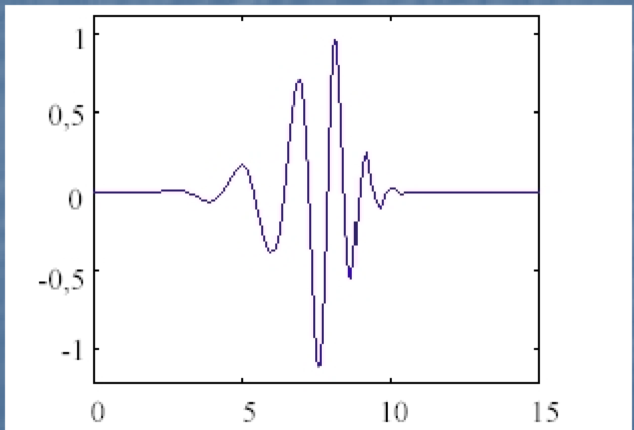
$$CWT_f(\tau, s) = \left\langle f(t), \Psi_{\tau,s}(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

gdzie: $\Psi(t)$ – falka podstawowa,

s, τ – odpowiednio argumenty skali i czasu, tworzące dziedzinę transformaty

Przekształcenie falkowe

Teoria falkowej reprezentacji sygnału nie definiuje konkretnej postaci falki, określa jedynie własności jakie musi posiadać taka funkcja. Wymaga się, by falka miała skończoną energię, wartość średnią równą zero oraz by posiadała niezerowe wartości tylko w skończonym przedziale. Spełnienie tych warunków powoduje, że falka posiada postać krótkotrwałej oscylacji , skąd wywodzi się jej nazwa.



Przykładowa falka

Przekształcenie falkowe

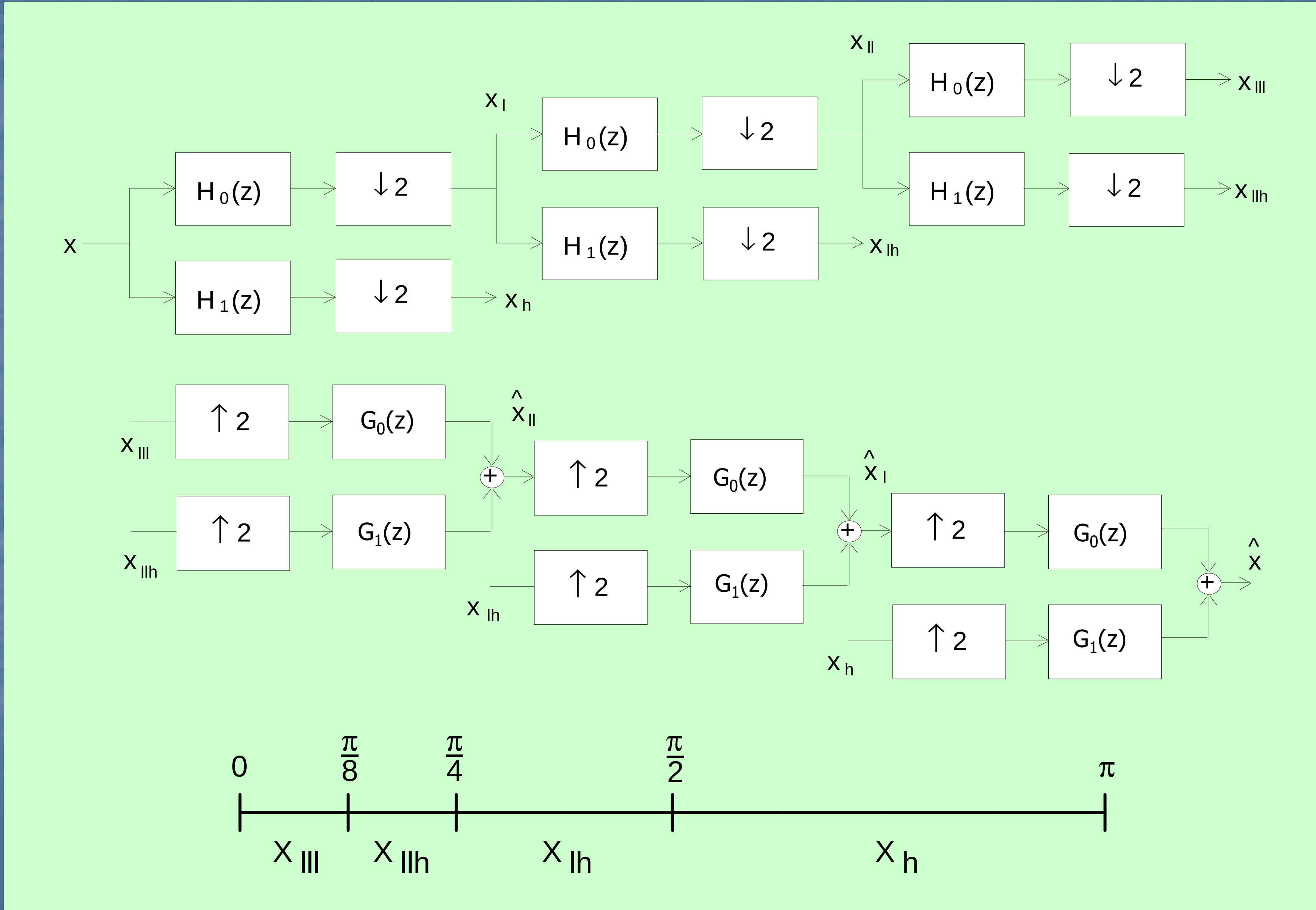
W wyniku jednowymiarowego przekształcenia falkowego otrzymuje się dwuwymiarową półpłaszczyznę , której argumentami są skala i czas. Zmienna skali wywodzi się ze skalowania falki podczas wyznaczania transformaty i posiada znaczenie odwrotności chwilowej częstotliwości.

Teoretyczne badania naukowe doprowadziły do opracowania różnych odmian

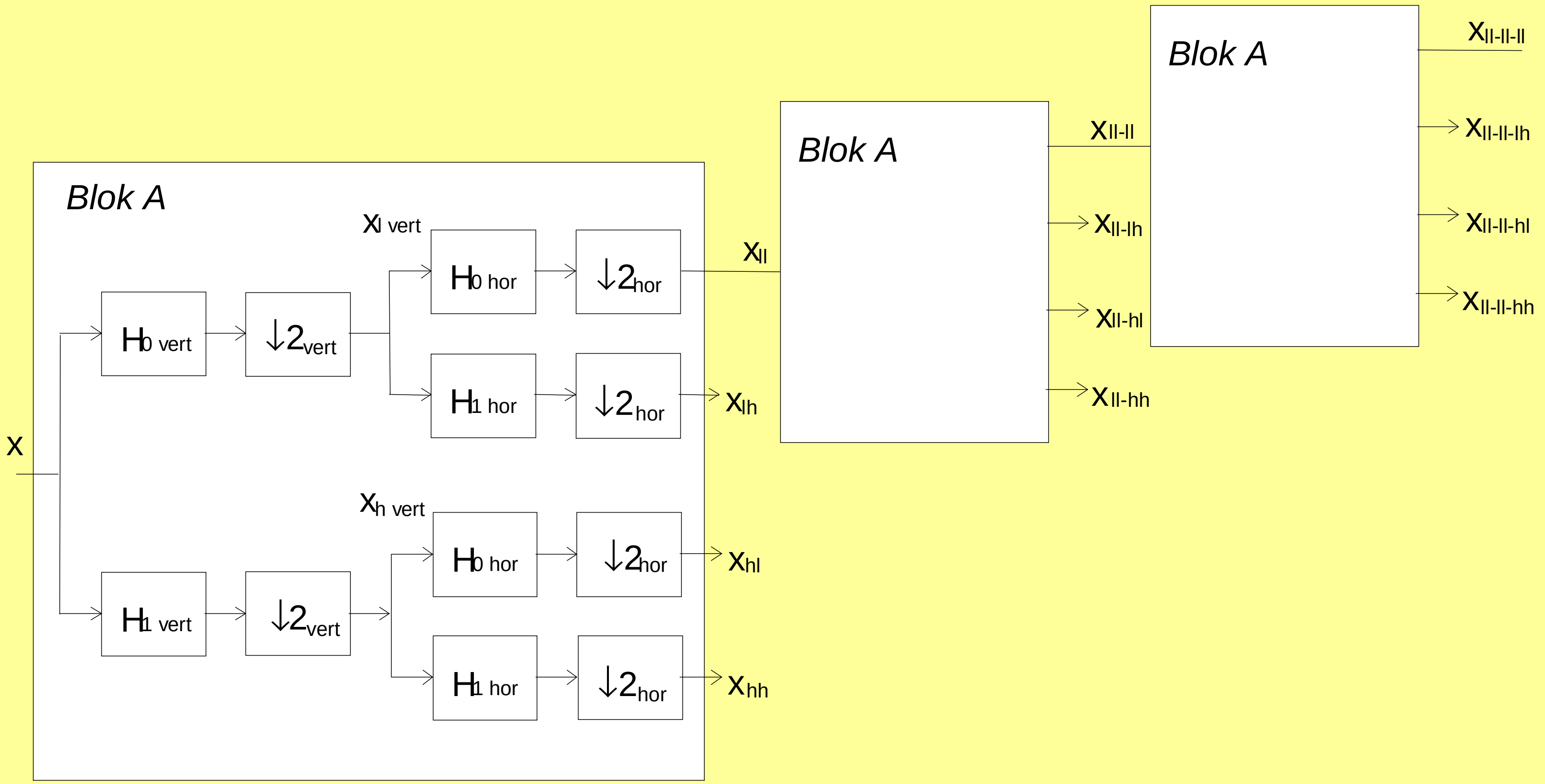
przekształcenia falkowego, przeznaczonych do cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Największe znaczenie posiada tu dyskretne przekształcenie falkowe, które dostarcza najbardziej zwartą reprezentację falkową sygnału dyskretnego. W wyniku tej transformacji otrzymuje się zbiór współczynników pogrupowanych odpowiednimi poziomami skali, zdyskretyzowanej wykładniczo. Na każdym poziomie skali, odpowiadającym analizowaniu sygnału z różną rozdzielczością, otrzymuje się współczynniki, których gęstość rozmieszczenia w czasie jest zależna od bieżącej wartości skali. Dzięki temu, uzyskuje się własność wielorozdzielczości, pozwalającą na dopasowanie się rozdzielczości czasowej analizy sygnału do aktualnej skali analizy.

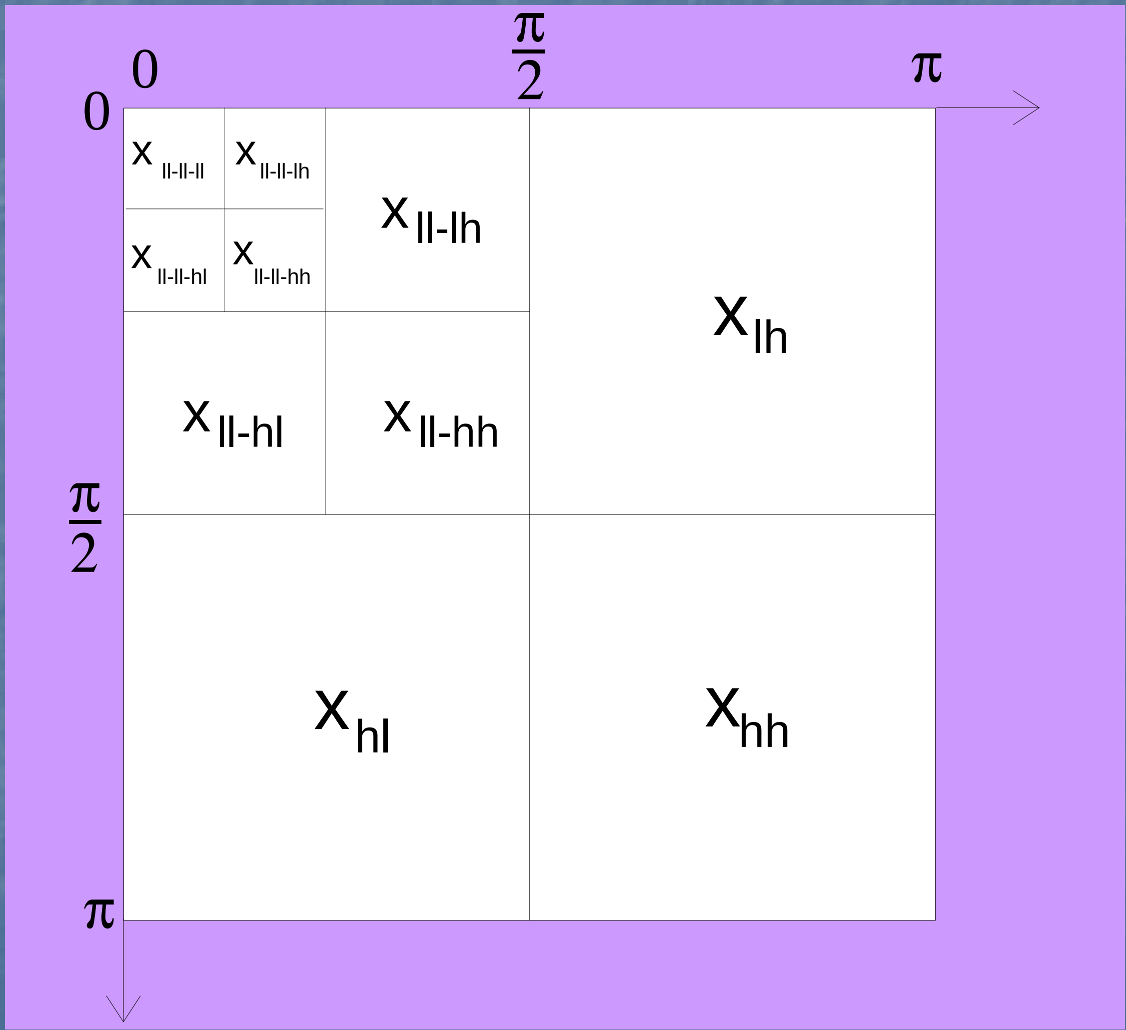
Jednowymiarowa analiza falkowa



Dwuwymiarowa analiza falkowa



Dwuwymiarowa analiza falkowa – c.d.



Realizacja - filtry LeGalla

$$H_0(z) = \frac{1}{8}\left(-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2\right) \quad (1)$$

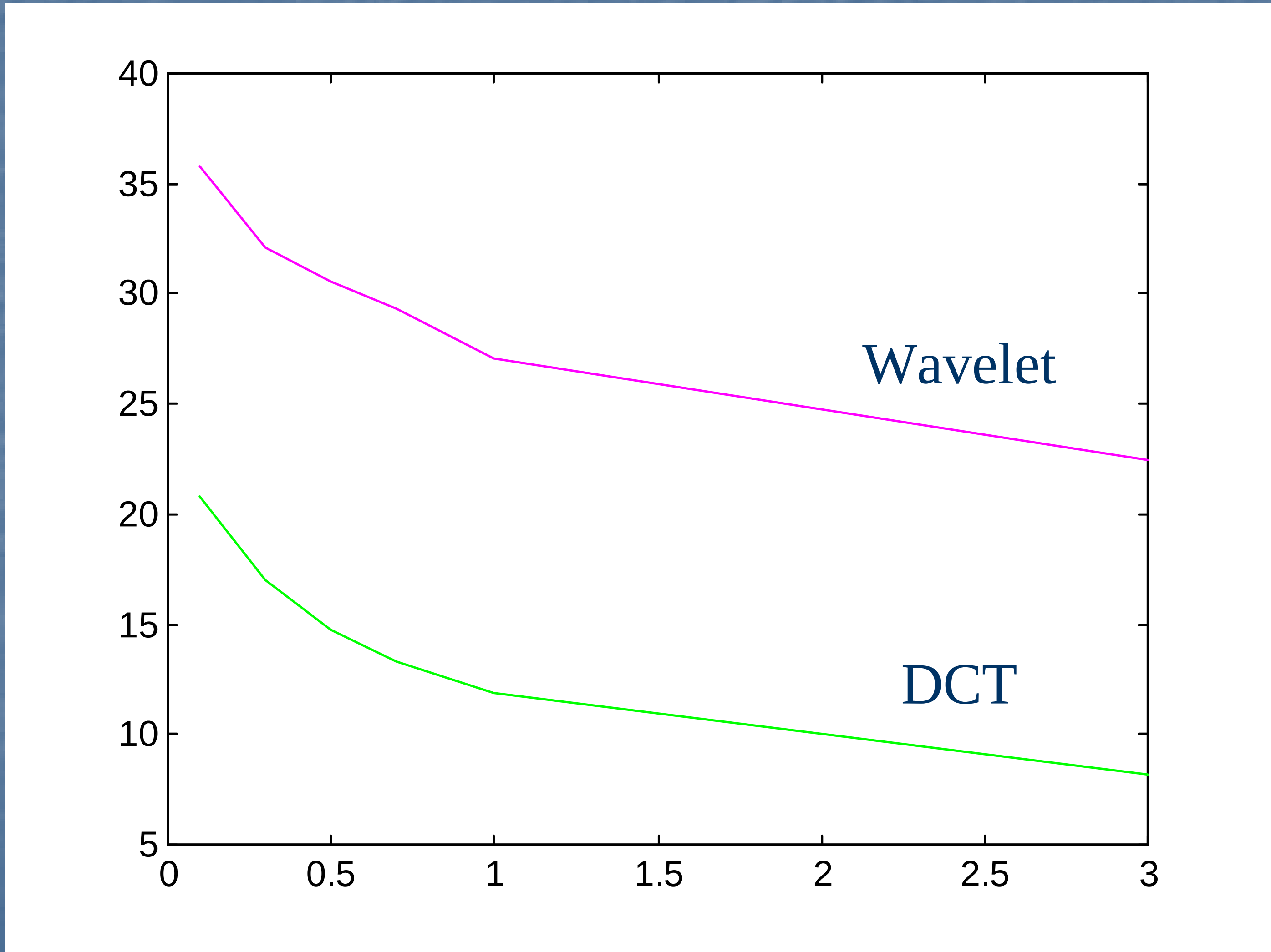
$$H_1(z) = \frac{1}{2}\left(-z^{-1} + 2 - z\right) \quad (2)$$

$$G_0(z) = \frac{1}{2}\left(z^{-1} + 2 + z\right) \quad (3)$$

$$G_1(z) = \frac{1}{8}\left(-z^{-2} - 2z^{-1} + 6 - 2z - z^2\right) \quad (4)$$

Jakość przetwarzania (1)

PSNR [dB]



BER [%]

Jakość przetwarzania (2)

DCT, BER=0.1%

WAVELET, BER=0.1%

Jakość przetwarzania (3)

DCT, BER=1%

WAVELET, BER=1%